Amortizovana slozitost

7 October, 2021 08:11

operace ... nejhorší čas T

k operací ... čas $\leq kT$

chceme lepší odhad ... amortizovaný čas operace A → "předplacený"

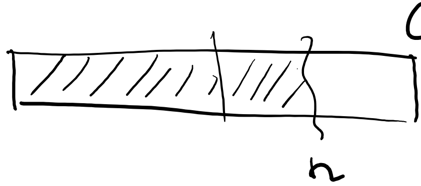
k operací $\leq kA \leq kT$

Př: nafukovací pole $\quad$ k operací $\leq 3k$

$\Rightarrow$ amortizovaný čas $A = 3$.

skutečný čas $R_1, R_2, \dots R_k$

$C = 2^j$



$$R_i = \begin{cases} 1 & \\ i+1 & \text{pro } i = 2^j \end{cases}$$

Jak počítat amortizovaný čas

1) přímo po spočtení času k operací
2) pomocí "potenciálu"

naspořený čas ... potenciál Φ ... odvozený ze stavu d.s., nezávislý na op's

amortizovaný čas i-té operace $\quad A_i = R_i + \Delta\Phi$

nafukovací pole: $\Phi = 2i - C = 2\underbrace{\left(i - \frac{C}{2}\right)}$

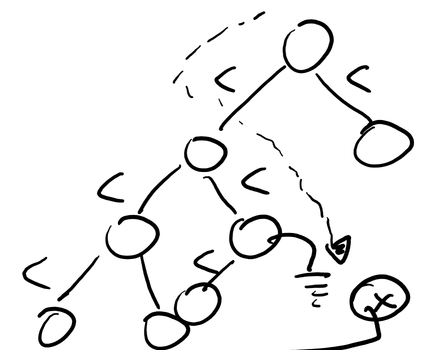
počet vložení
prvků od poslední
realokace

$$A = \begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ c + 1 + (2 - c) = 3 \end{cases}$$

po operaci před operací

Líné vyvažování stromy

binární vyhledávací strom ... prvky z universa $\{1, \dots, 4\}$



• FIND ✓

• INSERT ... hledej, když nenajdeš vlož na poslední místo, kam jsi se dostal

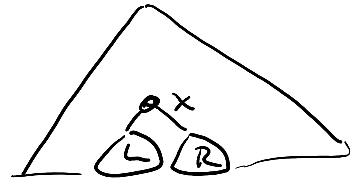
$\Rightarrow$ hloubka stromu může být libovolná, ideální $O(\log n)$

• AVL stromy – vyvažování (pomocí rotací)

hloubka levého L a pravého podstromu R se liší maximálně o 1.

• líné vyvažování

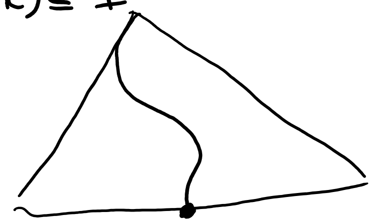
$s(x)$ ... velikost podstromu x (# vrcholů)



$\forall x \quad \frac{1}{3} s(x) \leq s(L), s(R) \leq \frac{2}{3} s(x)$ (I)

nebo $s(L), s(R) \leq 1$

$\Rightarrow$ hloubka $O(\lg n)$:

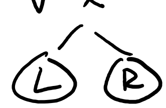


půjdu-li po libovolné cestě z kořene, velikost aktuálního podstromu se změní v každém kroku na $2/3$ aktuálního

$\Rightarrow$ hloubka $\leq \log_{3/2} n$.

$\rightarrow$ INSERT dělám naivně, pokud se poruší (I), pak přebuduji celý podstrom, kde je to porušení (ten nejvyšší)

a to tak, že v rámci podstromu

$\forall x$  $s(L) = s(R) \pm 1$

$\rightarrow$ lze udělat v čase $O(s(x))$. (cvič)

• aby došlo k přebudování stromu x, musí do něj být přidáno $\geq \frac{s(x)}{2}$ prvků.

$\Phi = C \sum r(x) \qquad r(x) = \begin{cases} |s(L_x) - s(R_x)| & \text{pokud je alespoň ...} \end{cases}$

$$\Phi = C \sum_x r(x)$$

vhodná konstanta

$$r(x) = \begin{cases} |s(L_x) - s(R_x)| & \text{pokud je alespoň } 2 \\ 0 & \end{cases}$$

(1) pokud nedojde k přebudování žádného stromu, potenciál vzroste o $O(\lg n)$

(2) pokud dojde k přebudování stromu s kořenem x, pak potenciál klesne o $\geq C \cdot \frac{s(x)}{3}$

$$s(x) = s(R) + s(L) + 1$$

$$s(R) > \frac{2}{3}\left(s(R) + s(L) + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} s(R) > \frac{2}{3} s(L) + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow s(R) > 2 s(L) + 2$$

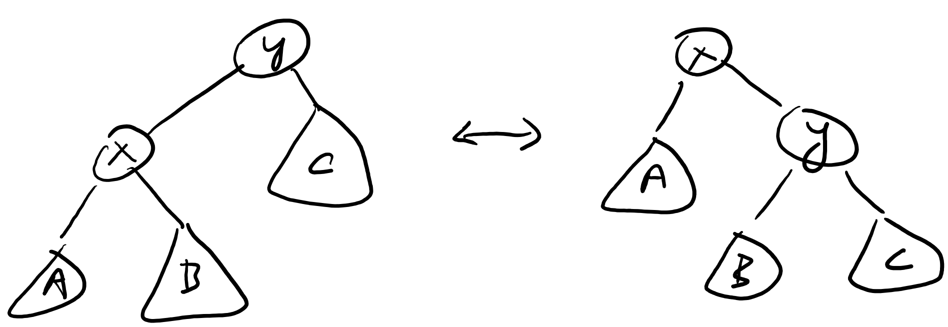
$$\Rightarrow s(R) - s(L) \geq \frac{1}{2} s(R) \geq \frac{1}{3} s(x)$$

$$A_i = R_i + \Delta \Phi \begin{cases} O(\lg n) + O(\lg n) & (1) \\ O(s(x) + \lg n) - C\frac{s(x)}{3} & (2) \end{cases}$$

$$= O(\lg n)$$

Splay stromy

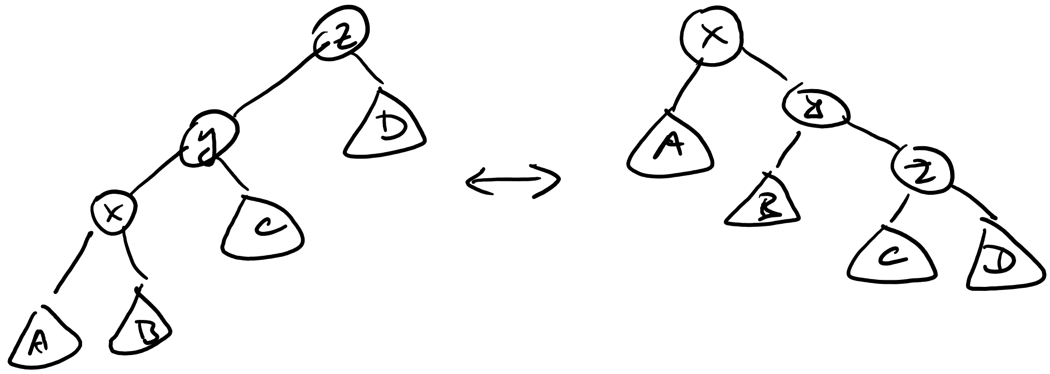
rotace



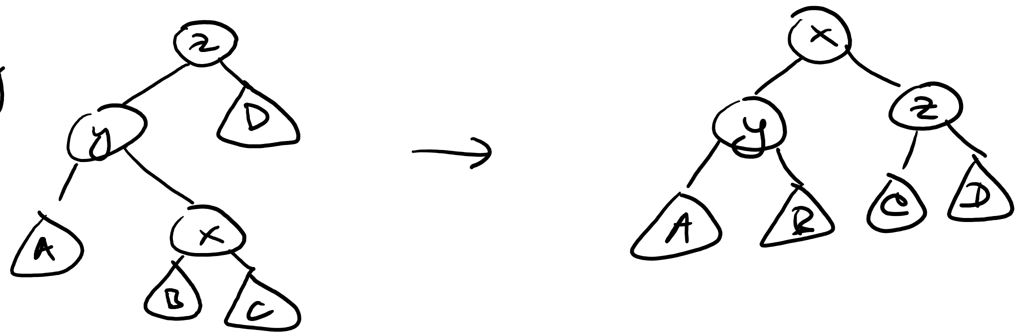
dvojitá rotace

---

zig-zig



zig-zag

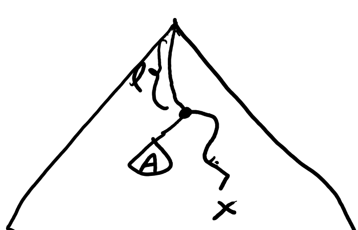


+ symetricky

Splay (x) – operace přenese uzel x do kořene pomocí dvojitých rotací (a případně jedné jednoduché nakonec)

Operace: FIND(x), INSERT(x), DELETE(x)
→ provedou vždy nejprve operaci Splay(x)

pozorování:



po splay(x), se délka cesty k A zkrátí o $\approx l/2$.

amortizovaná cena Splay .. $O(\lg n)$